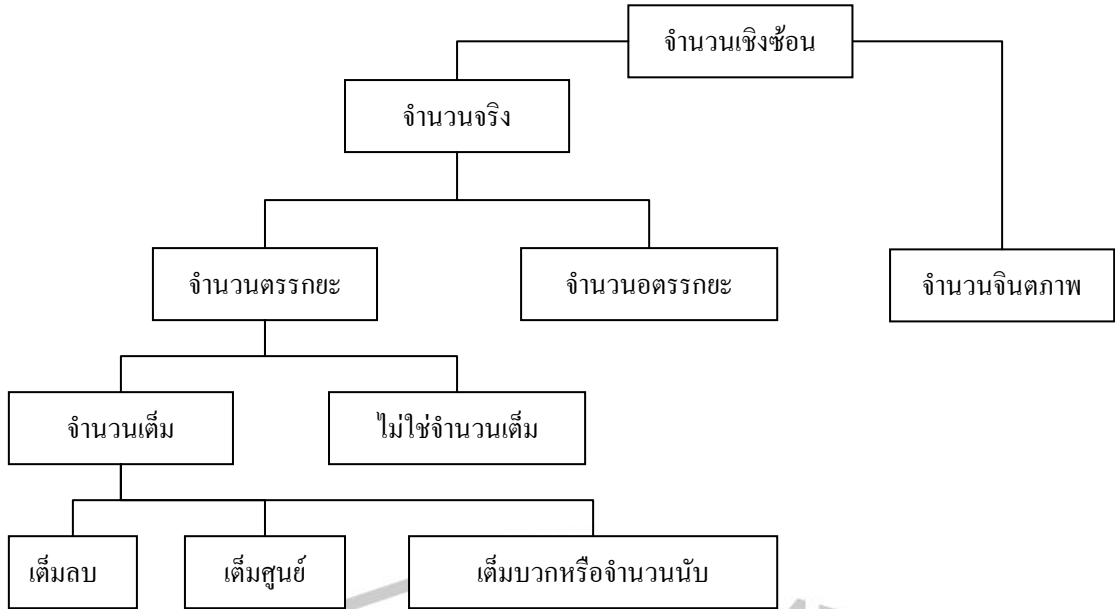


# จำนวนเชิงซ้อน

## 1. โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน



## หน่วยจินตภาพ

นิยาม กำหนดให้  $i = \sqrt{-1}$  ดังนั้น  $i^2 = -1$  เรียก  $i$  ว่า หน่วยจินตภาพ

สรุป ควรจำได้ว่า			
$i = i$	$i^2 = -1$	$i^3 =$	$i^4 =$
$i^{2481} =$	$i^{2499} =$	$i^{786} =$	$i^{528} =$

ตัวอย่างที่ 1 ค่าของ  $(1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{10}) + i^{25}$  คือข้อใด(บ.ค.3)

1. -1                      2. 2                      3.  $-2i$                       4.  $2i$

## 2. จำนวนเชิงซ้อน

## 2.1 เท่ากัน

## 2.2 การบวก การลบ

## 2.3 การคูณ

ตัวอย่างที่ 2 ให้  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริง โดยที่  $(x-2y)+(3x-5y)i=(2x+y)-14i$  แล้ว  $x+y$  มีค่าตรงกับข้อใด (บดินทร์)

1.  $-2$ 2.  $-1$ 3.  $0$ 4.  $2$ 

ตัวอย่างที่ 3 จงหาคำตอบของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้  $(1-i)-2i-(3+5i)$  (บ.ด.3)

1.  $-2-4i$ 2.  $-2-8i$ 3.  $-3-i$ 4.  $-3-8i$ 

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด  $z_1=3+4i$ ,  $z_2=5-4i$ ,  $z_3=-6-5i$  จงหาค่าของ  $5z_3+2z_2-3z_1$  (บ.ด.3)

1.  $-29-45i$ 2.  $-11-45i$ 3.  $-29-11i$ 4.  $-11-11i$ 

ตัวอย่างที่ 5  $(1+i)^3+2(1-i)^4+4(1+i)^6$  มีค่าตรงกับข้อใด(บดินทร์)

1.  $6i$ 2.  $-8-3i$ 3.  $24+2i$ 4.  $-10-30i$

## 3. การหารจำนวนเชิงซ้อน

$$3.1 \text{ การหาร} \quad \frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

ตัวอย่างที่ 6 ค่าของ  $\frac{i^{288} + i^{500} + i^{401} + i^{303}}{i^{43} + i^{39} + i^{56} + i^{97}}$  ตรงกับข้อใด(บ.ค.3)

1.  $2+i$

2.  $2-i$

3.  $1+i$

4.  $1-i$

## 3.2 สัมยุคของจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม ถ้า  $Z=(a,b)=a+bi$  แล้ว สัมยุค ก็คือ  $\bar{Z}=(a,-b)=a-bi$

หมายเหตุ กำหนดให้  $Z=a+bi$

- อินเวอร์สการบวกของ  $Z$  คือ  $-Z=-(a+bi)=-a-bi$

- อินเวอร์สการคูณของ  $Z^{-1}$  คือ  $\frac{1}{Z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

คุณสมบัติของสัมยุค (conjugate)

1.  $\overline{\bar{Z}} = Z$

2.  $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

3.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

4.  $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$

5.  $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

6.  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{\bar{z}}$

ตัวอย่างที่ 7 อินเวอร์สการคูณของสัมยุคของจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{2+i}{3-2i}$  คือข้อใด

1.  $\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$

2.  $\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$

3.  $-\frac{52}{65} + \frac{91}{65}i$

4.  $-\frac{52}{65} - \frac{91}{65}i$

## 4. กราฟและค่าสัมบูรณ์

## 4.1 กราฟ

## 4.2 ค่าสัมบูรณ์

สมบัติของจำนวนเชิงซ้อน(ค่าสัมบูรณ์)

1.  $|z| = |\bar{z}|$
2.  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
3.  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
4.  $|z^n| = |z|^n$

ตัวอย่างที่ 8 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนในข้อใดมีค่ามากที่สุด

1.  $(-7, 2) + (1, -4)$
2.  $(-4, -1) + (2, 0)$
3.  $(-3, -7) + (8, 2)$
3.  $(-2, 1) + (6, 0)$

## 5. จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ทฤษฎี

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

ตัวอย่างที่ 9 ถ้า  $2(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{3} - i$  แล้วจงหา  $\theta$ 

1.  $\frac{\pi}{6}$
2.  $\frac{5\pi}{6}$
3.  $\frac{7\pi}{6}$
4.  $\frac{11\pi}{6}$

ตัวอย่างที่ 10 จำนวนเชิงซ้อน  $z = \sqrt{3} - i$  เขียนในรูปเชิงขั้วได้เท่ากับข้อใด

1.  $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
2.  $4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
3.  $2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$
4.  $4(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$

6. การหารากที่  $n$  ของจำนวนเชิงซ้อน

$$\text{ทฤษฎี } Z_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right] \text{ เมื่อ } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

ตัวอย่างที่ 11 รากที่สองของ  $i$  มีค่าเท่ากับข้อใด

1.  $\frac{1-i}{\sqrt{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

2.  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

3.  $\frac{1-i}{\sqrt{2}}, -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

4.  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

## 7. สมการพหุนาม

## 7.1 สมการพหุนามกำลังสอง

## 7.3 สมการพหุนามที่มีกำลัง 3 ขึ้นไป

ตัวอย่างที่ 12 จงแก้สมการ  $4x^2 + 2x + 1 = 0$



ตัวอย่างที่ 13 จงหารากของสมการ  $z^3 - 5z + 12 = 0$

1.  $-3, -2, 2$

2.  $-3, \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$

3.  $2, \frac{2 \pm \sqrt{5}i}{2}$

4.  $1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาสมการกำลัง 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมี  $1, -2$  และ  $3i$  เป็นคำตอบของสมการ

## แบบทดสอบ

## จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

แนวที่ 1 บวก ลบ คูณ หาร จำนวนเชิงซ้อน

1. ค่าของ  $\frac{i^{2543} + i^{2000}}{i^{2543+2000}}$  เท่ากับเท่าใด

1.  $1+i$                       2.  $1-i$                       3.  $i-1$                       4.  $-1-i$

1. จงหาค่า  $x + y$  จากสมการ  $\frac{9+yi}{x+3i} = 3-i$

1. 9                      2. -9                      3. 5                      4. -5

2. กำหนดให้  $Z_1 = (3, -5)$  และ  $Z_2 = (-2, 5)$  แล้วจงหาค่าของ  $Z_1 Z_2 - 3Z_1$

1.  $10 + 40i$                       2.  $-5 - 25i$                       3.  $19 + 25i$                       4.  $9 - 15i$

1. ถ้า  $Z = \frac{10}{i(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}$  แล้วส่วนจินตภาพของ  $Z$  คือข้อใด

1.  $-\frac{4}{17}$                       2.  $\frac{1}{17}$                       3.  $\frac{1}{17}i$                       4.  $-\frac{4}{17}i$

2. ถ้าจำนวนเชิงซ้อน  $(5 - 3i) + (-4 + 5i) = (a, b - 2)$  อินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อน  $(a, b)$  ตรงกับข้อใด

1.  $(4, 1)$                       2.  $(-4, -1)$   
3.  $\left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}\right)$                       4.  $\left(\frac{1}{17}, -\frac{4}{17}\right)$

3. ถ้าจำนวนเชิงซ้อน  $(a + bi)(2 + 3) = 5 - 3i$  แล้วอินเวอร์สการบวกของจำนวนเชิงซ้อน  $(a, b)$  ตรงกับข้อใด

1.  $\left(\frac{1}{13}, \frac{21}{13}\right)$                       2.  $\left(\frac{1}{13}, -\frac{21}{13}\right)$   
3.  $\left(-\frac{1}{13}, -\frac{21}{13}\right)$                       4.  $\left(-\frac{1}{13}, \frac{21}{13}\right)$

3. ให้  $z = \left(\frac{1-2i}{1+3i}\right)^2$  แล้วส่วนของจินตภาพของ  $Z$  มีค่าเท่าไร(2/2542)

1.  $\frac{1}{2}i$                       2.  $-\frac{1}{2}i$                       3.  $\frac{1}{2}$                       4.  $-\frac{1}{2}$

4. ถ้า  $a - 5bi + \frac{1-i}{-i} = \frac{1+i}{i}$  แล้ว  $a - b$  คือข้อใด

1.  $\frac{2}{5}$                       2.  $-\frac{2}{5}$                       3.  $\frac{2}{3}$                       4.  $-\frac{2}{3}$

5. จงหาคำตอบของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้  $(1-i) - 2i - (3+5i)$

1.  $-2 - 4i$                       2.  $-2 - 8i$                       3.  $-3 - i$                       4.  $-3 - 8i$

6. จงหาผลลัพธ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้  $(8 + \sqrt{2}i)(1 + \sqrt{3}i)$



1.  $1+2i$                       2.  $1-2i$                       3.  $2+i$                       4.  $2-i$

**14.** ให้  $\bar{Z}_1 = 2-3i$  และ  $Z_1\bar{Z}_2 + 2\bar{Z}_2 - 1 = 0$  จงหาอินเวอร์สสำหรับการคูณของ  $Z_2$  คือข้อใด(2/2542)

1.  $2-3i$                       2.  $2+3i$                       3.  $4-3i$                       4.  $4+3i$

**15.** จากสมการ  $\left| \frac{Z-1}{Z-3} \right| = 1$  และ  $Z \cdot \bar{Z} = 13$  จงหาค่าของ  $Z$

1.  $3 \pm 3i$                       2.  $2 \pm 3i$   
3.  $\sqrt{5} + 2\sqrt{2}i$                       4.  $2\sqrt{2} \pm \sqrt{5}i$

**16.** ข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นจริง

1.  $|z_1 + z_2| \geq |z_1| + |z_2|$   
2.  $|z| \neq \sqrt{z \cdot \bar{z}}$   
3.  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  เมื่อ  $|z_2| = 0$   
4.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

**17.** ผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของรากสมการ  $z^3 = 8$  ในระบบเชิงซ้อนคือข้อใด

1. 6                      2. 8                      3. 10                      4. 20

**18.** ถ้า  $z = \frac{3-4i}{(8-6i)(\sqrt{3}+i)}$  แล้ว  $|z|$  เท่ากับข้อใด

1.  $\frac{1}{2}$                       2.  $\frac{1}{3}$                       3.  $\frac{1}{4}$                       4.  $\frac{1}{5}$

**19.** ถ้า  $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$  และ  $Z_2 = 4+3i$  แล้ว  $|Z_1^2 \cdot Z_2^3|$  เท่ากับข้อใด

1. 1                      2. 5                      3. 25                      4. 125

**1.** ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{4i(1-\sqrt{3}i)}$  คือข้อใด(บ.ต.3 2/2544)

1.  $-\frac{1}{2}$                       2.  $\frac{1}{2}$                       3.  $-\frac{2}{3}$                       4.  $\frac{2}{3}$

**2.** กำหนด  $z_1 z_2 = 2+2i$  และ  $z_1 z_2^2 = (2-2i)$  ค่าของ  $|z_1 + z_2|$  เท่ากับข้อใด(บ.ต.3 2/2544)

1. 2                      2. 4                      3. 8                      4. 12

**แนวที่ 3 พิกัดเชิงขั้ว**

**5.** จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อสรุปใดเป็นจริง

ก.  $\left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{50} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ข.  $-8 - 8\sqrt{3}i = 16 \left[ \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right]$

1. ถูกเฉพาะข้อ ก                      2. ถูกเฉพาะข้อ ข  
3. ถูกทั้งข้อ ก และ ข                      4. ผิดทั้งข้อ ก และ ข



6. กำหนดให้  $Z_1 = \frac{8}{5}[\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ]$   $Z_2 = 5[\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ]$  แล้วข้อสรุปในข้อใดต่อไปนี้  
เป็นจริง

ก.  $Z_1 Z_2 = 4\sqrt{3} + 4i$

ข.  $Z_1 + Z_2 = \frac{4}{5} + \left(\frac{25 - 4\sqrt{3}}{5}\right)i$

1. ถูกเฉพาะข้อ ก

2. ถูกเฉพาะข้อ ข

3. ถูกทั้งข้อ ก และ ข

4. ผิดทั้งข้อ ก และ ข

20. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน  $2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$  ในรูป  $a + bi$

1.  $2 - 2i$

2.  $\sqrt{2} - i$

3.  $-2 + 2i$

4.  $\sqrt{2} + i$

21. ให้  $Z_1 = 1 + i$  แล้ว  $Z_2 = \sqrt{3} - i$  จงหา  $Z_1 Z_2$

1.  $\frac{2}{\sqrt{2}} \cos 15^\circ + \sin 15^\circ$

2.  $2\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$

3.  $2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

4.  $4\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$

22.  $[\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)][2(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)]$  เท่ากับข้อใด

1.  $2\sqrt{2}(\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ)$

2.  $2\sqrt{2}(\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ)$

3.  $8(\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ)$

4.  $8(\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ)$

2. เปลี่ยน  $(-2 + i) - (3 - 6i)$  ในรูปเชิงขั้ว

1.  $5(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

2.  $5(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$

3.  $5\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

4.  $5\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$

แนวที่ 4 สมการพหุนาม

23.  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{78}$  เท่ากับข้อใด

1.  $-i$

2.  $i$

3.  $1$

4.  $-1$

24. จงหาเซตคำตอบของสมการ  $x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18 = 0$

1.  $\{1, -2, 3i, -3i\}$

2.  $\{-1, 2, 3i, -3i\}$

3.  $\{1, -2, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$

4.  $\{1, 2, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$

25. เซตคำตอบของสมการ  $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$  ตรงกับข้อใด

1.  $\{1, -1, i, -i\}$

2.  $\{2, -2, 3i, -3i\}$

3.  $\{3, -3, 3i, -3i\}$

4.  $\{3, -3, 2i, -2i\}$

26. จากสมการ  $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$  ผลบวกของรากสมการเท่ากับข้อใด
1. 1                                      2. 2                                      3. 3                                      4. 4
3. พิจารณาสมการ  $x^2 - 2x - 3ix + 3i + 1 = 0$  (บ.ด.3 2/2544)
- ก. ผลบวกของรากทั้งสองตัวคือ  $2 + 3i$   
 ข. ผลคูณของรากทั้งสองตัวคือ  $1 - 3i$   
 ข้อใดกล่าวถูกต้อง
1. ถูกทั้งข้อ ก และ ข้อ ข                                      2. ผิดทั้งข้อ ก และ ข้อ ข  
 3. ข้อ ก ถูก ข้อ ข ผิด                                              4. ข้อ ก ผิด ข้อ ข ถูก
4. พิจารณาสมการต่อไปนี้ ข้อสรุปใดถูกต้อง(บ.ด.3 2/2544)
- ก. เซตคำตอบของสมการ  $x^2 - 9i = 0$  คือ  $\left\{ \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i, \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i \right\}$   
 ข. เซตคำตอบของสมการ  $x^2 + 4i = 0$  คือ  $\left\{ -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i \right\}$   
 ข้อใดกล่าวถูกต้อง
1. ถูกทั้งข้อ ก และ ข้อ ข                                      2. ผิดทั้งข้อ ก และ ข้อ ข  
 3. ข้อ ก ถูก ข้อ ข ผิด                                              4. ข้อ ก ผิด ข้อ ข ถูก
5.  $(1 - \sqrt{2})$  เป็นคำตอบหนึ่งของสมการใด(บ.ด.3 2/2544)
1.  $3x^3 - 7x^2 - x + 1 = 0$                                       2.  $3x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$   
 3.  $3x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$                                       4.  $3x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$
6. กำหนด  $-1 + \sqrt{3}i$  เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ  $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x + 4 = 0$  คำตอบที่เหลือทั้งหมดของสมการคือข้อใด(บ.ด.3 2/2544)
1.  $1 - \sqrt{3}i, i, -i$ .                                              2.  $1 - \sqrt{3}i, 2, -2$ .  
 3.  $-1 - \sqrt{3}i, 2, -2$ .                                              4.  $-1 - \sqrt{3}i, i, -i$ .
7. ถ้า  $Z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นคำตอบของสมการ  $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$  แล้ว  $|z|$  มีค่าเท่ากับข้อใด(บ.ด.3 2/2544)
1. 1                                      2. 2                                      3. 3                                      4. 4
8. ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของรากสมการ  $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36 = 0$  ตรงกับข้อใด(บ.ด.3 2/2544)
1. 3                                      2. 5                                      3. 8                                      4. 11
9. เศษที่เหลือจากการหาร  $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$  ด้วย  $x - 1$  และ  $x + 1$  ตามลำดับ คือข้อใด(บ.ด.3 2/2544)
1.  $-1, 5$                                       2.  $1, -5$                                       3.  $1, 5$                                       4.  $-1, -5$
10. จงหาค่า  $p$  และ  $q$  ที่ทำให้  $x^2 + x - 2$  เป็นคำตอบของ  $x^3 + 10x^2 + px + q = 0$  (บ.ด.3 2/2544)
1.  $p = 7, q = -18$                                       2.  $p = -7, q = 18$   
 3.  $p = -7, q = -18$                                       4.  $p = 7, q = 18$

1. จงหาจำนวนเชิงซ้อน  $z$  ที่ทำให้  $(-5,7)z = (31,75)$   $z = \dots\dots\dots$
2.  $Z_1 = (-1,4)$   $Z_2 = (5,-5)$  อินเวอร์สของการคูณของ  $Z_1 Z_2 = \dots\dots\dots$
3. จงเขียน  $\frac{5}{i(3-i)(4+3i)(5+2i)}$  ให้อยู่ในรูปเชิงซ้อน  $a + bi = \dots\dots\dots$
4. จงเขียน  $\left[ 8\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \div 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \right]^2$  ให้อยู่ในรูป  $a + bi = \dots\dots\dots$
5. จงเปลี่ยน  $(8 + 6i) + (3 - 6i)$  ในรูปเชิงซ้อน
6. จงหาค่าของ  $(1-i)^{12}$
7. จงหารากที่สองของ  $x^2 + 9i$
8. จงหารากของสมการ  $x^3 - 6x^2 + 13x - 8 = 0$
9. จงหาค่าของ  $\frac{\sqrt{5-12i} - \sqrt{5+12i}}{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}$
10. จงหาคอนจูเกตของ  $\frac{4+i}{4-i} \cdot \frac{2-i}{2+i}$

1. จงหารากของสมการ  $x^2 + 5 = 0$
2. จงหาเซตคำตอบของสมการ  $2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$
3. ค่าตอบของ  $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$  คือข้อใด
4. จงพิจารณาข้อต่อไปนี้ ข้อสรุปใดเป็นจริง
5. กำหนดให้  $Z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง

### รวมข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย